PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

NOÇÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Paulo Cezar Pinto Carvalho

Probabilidade - Aula 1

O Princípio Fundamental da Contagem

O Princípio da Contagem

Considere um processo de r estágios. Suponha que:

a) Existam n_1 possíveis resultados para o primeiro estágio

b) Para todos os resultados do primeiro estágio existam n_2 possíveis resultados para o segundo estágio.

c) Generalizando, para quaisquer possíveis resultados dos primeiros $i-1$ estágios, existem n_i possíveis resultados no *i-ésimo* estágio.

Assim, o número total de possíveis resultados do *r-ésimo* estágio é:

$$\boxed{n_1 n_2 \ldots n_r}$$

O Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo 1 (A quantidade de números de telefone)

Um número de telefone é uma seqüência de 7 dígitos, mas o primeiro dígito deve ser diferente de 0 ou 1. Quantos números de telefone distintos existem?

• Podemos raciocinar na escolha de uma seqüência como um processo onde selecionamos 1 dígito por vez. Temos um total de 7 estágios e 10 algarismos para escolher, com excessão do primeiro onde temos somente 8 dígitos.

$$\boxed{8 \cdot \underbrace{10 \cdot \ldots \cdot 10}_{6\ vezes} = 8 \cdot 10^6}$$

O Princípio Fundamental da Contagem

Exemplo 2 (A quantidade subconjuntos em um conjunto de *n* elementos)

Considere um conjunto de n elementos $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$. Quantos subconjuntos ele possui (incluindo ele mesmo e o conjunto vazio)?

• Podemos raciocinar na escolha de um subconjunto como como um processo onde examina-se um elemento por vez e é decidido se ele irá ou não pertencer ao subconjunto. Teremos um total de n estágios, e uma escolha binária em cada estágio.

$$\boxed{\underbrace{2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ vezes} = 2^n}$$

Permutações

Supondo ***n*** objetos distintos e seja k um inteiro positivo onde k ≤ n. Queremos determinar o número de possíveis seqüências de k elementos selecionados entre os n objetos.

$$\boxed{\underbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}_{k\ \text{elementos}} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)(n-k)\ldots 2\cdot 1}{(n-k)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

No caso especial onde n = k, o número de possíveis seqüências é calculado como:

$$\boxed{n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1 = n!}$$

Permutações

Exemplo 3

Vamos contar o número de palavras feitas de quatro letras distintas do alfabeto.

• Esse é um problema de contagem do número de 4-permutações de 26 letras do alfabeto. O número procurado é:

$$\boxed{\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{26!}{22!} = 26\cdot 25\cdot 24\cdot 23 = 358.800}$$

Combinações

• Nas combinações o cálculo realizado é semelhante ao das permutações, porém, são descontados os efeitos de ordem no cálculo de número de possíveis combinações.

• Falando de outra maneira, o que se deseja calcular é o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de n elementos, com k ≤ n.

$$\boxed{\underbrace{n(n-1)...(n-k+1)}_{k\text{ elementos}} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)(n-k)...2\cdot 1}{(n-k)...2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Descontando o efeito de ordem $\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k}$

Combinações

Exemplo 4

O número de combinações de duas possíveis letras em um conjunto de 4 (A, B, C e D).

• Nesse caso, n = 4 e k = 2

$$\boxed{\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6}$$

Combinações

Exemplo 5

Marcam-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta R´ paralela a R. Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?

• Para formar um triângulo, ou tomamos um vértice em R e dois em R´, ou dois em R e um em R´. O número de triângulos do 1º tipo é $5\cdot\binom{8}{2}$ e do segundo tipo é $8\cdot\binom{5}{2}$

A resposta será:

$$\boxed{5\cdot\binom{8}{2} + 8\cdot\binom{5}{2} = 140 + 80 = 220}$$